D-N型混合境界条件をもつ弾性体方程式の解の正則性について (変分問題とその周辺)

林田, 和也

数理解析研究所講究録
1181 巻 2001 年 12-23

D－N型混合境界条件をもつ弾性体方程式の解の正則性について

金沢大学理学部 林田和也 (Kazuya Hayasida)

September 29, 2000

1 序文

Ω は $R^n(n\geq 2)$ の有界領域で、Ω の境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。S は $\partial\Omega$ 上の十分滑らかな $n-2$ 次元コンパクト多様体とし、S は $\partial\Omega$ を二つの空でない（相対）開集合 $\partial_+\Omega, \partial_-\Omega$ に分けるとする。すなわち、

$$\partial\Omega=\partial_+\Omega\cup\partial_-\Omega\cup S, \quad \partial_+\Omega\cap\partial_-\Omega=\phi,$$

$$\partial_+\Omega, \quad \partial_-\Omega\neq\phi$$

このとき、次の Dirichlet-Neumann 型混合境界値問題を考える：

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (-\triangle+\lambda)u=f & in\ \Omega \\ u=g \quad on\ \partial_-\Omega, & \frac{\partial u}{\partial\nu}=h \quad on\ \partial_-\Omega \end{cases}$$

ただし、ν は $\partial_-\Omega$ における外法線方向。λ は Ω に依存して決まるある定数よりも大きな実数。更に f, g, h はそれぞれ $\overline{\Omega}$, $\overline{\partial_+\Omega}$, $\overline{\partial_-\Omega}$ 上で十分滑らかな関数で、簡単のため S の近傍で $g=h=0$ とする。

問題 (1.1) について、弱解 $u\in H^1(\Omega)$ が一意的に存在することは明らかである。また $\overline{\Omega}-S$ では、f, g, h の滑らかさに応じて u も滑らかになることは、混合型でない境界値問題の結果とその局所性から明らかである。では、S の近傍でも同じように u の滑らかさが出るであろうか。このことは、次ぎのような簡単な反例によって否定される：

$(x,y)-$平面で考える。$\Omega=\{y>0\}$, $\partial_+\Omega=\{(x,0)|x>0\}$, $\partial_-\Omega=\{(x,0)|x<$

$0\}$, $S=\{(0,0)\}$, このとき、

$$u(x,y)=Im(x+iy)^{1/2}$$

とおけば、

$$\triangle u=0 \quad in\,\Omega, \quad u=0 \quad on\,\partial_+\Omega, \quad u_y=0 \quad on\,\partial_-\Omega$$

明らかに、この u についての２階導関数 $\partial^2 u$ は S の近傍で $L^{4/3}$ に属さない。すなわち、$u\notin W^{2,4/3}$。

1968年、Shamir[9] はこの値 $\frac{3}{4}$ が臨界値であることを示した。すなわち、(1.1) の混合境界値問題の解 $u\in H^1(\Omega)$ は、$u\in W^{2,4/3-\varepsilon}(\forall\varepsilon>0)$ をみたすことを示した。方法は、不連続な表象をもつ擬微分作用素の理論を展開することで、かなり難解である。従って、初等的な変分法の理論を用いて、より易しい方法で上述のような結果が得られるかという疑問が生じる。1985年の著者と長瀬氏との共同研究 [3] によって、この疑問に対する一つの解答が得られたので、最初にこれを簡単に紹介しておく。

[3] では、作用素が対角型のラプラス作用素であるような変分不等式系を考えた。従って Dirichlet 条件は同じであるが、Neumann 条件は変分不等式に即した条件で置き換えなければならない。具体的にいえば、$\Omega\subset\{x_n>0\}$ とし、

$$\partial\Omega\supset\Gamma=\{(x_1,...,x_{n-1},0)|\,|x|<R\}$$

とする。更に

$$\Gamma_+=\{x\in\Gamma|\,x_{n-1}>0\},\Gamma_-=\{x\in\Gamma|\,x_{n-1}<0\},$$

$$S=\{x\in\Gamma|\,x_{n-1}=0\}$$

とおく。変分不等式の解 $U=(u_1,...,u_N)\in(H^1(\Omega))^N$ について、Γ_+ 上では、$U=O$ とする。Z は原点を含む R^N の閉凸集合とし、Γ_- 上では、$U(x)\in Z$, $\forall x\in\Gamma_-$ とする。

更に $\varepsilon>0$ について、Ω の部分集合 Σ_ε を $\{x_n>\varepsilon|x_{n-1}|\}\cap\{O$のある近傍$\}$ で定義する。以上のもとで、解U について、$\forall\varepsilon_1$, ε_2

$$\partial^2 U\in(L^{10/9-\varepsilon_1}(\Sigma_{\varepsilon_2}))^N$$

がなりたつことが、[3] の結果である。ここで指数 $\frac{10}{9}$ はShamir[9] での指数 $\frac{4}{3}$ に相当するものである。ただし我々の場合、原点の近傍の代わりに Σ_ε で考えざるを得ない。また、指数が $\frac{10}{9}$ より良くならないとは断言出来ないが、[3] の方法では $\frac{10}{9}$ が

ベストである。

単独の変分不等式の解は、低階を非線形項にもつ楕円型方程式の解で近似されるから、Shamir[9] の結果が応用されて、同じく解が $W^{2,4/3-\varepsilon}$ に属することが、Murthy-Stampacchia [7] で知られている。しかしこの議論は変分不等式系へは適用されない。要するにGreen 関数で解が表示されること、またはそのような解で近似されることが、不連続な表象をもつ擬微分作用素の理論を展開するに際して重要なことである。

次に、1987年の著者と河合氏との共同研究 [4] に簡単にふれる。ここでは、$p-$ラプラス方程式のDirichlet-Neumann 型混合境界値問題を取り扱っている。解の2階導関数の評価を出しているが、重みつきノルムのため複雑になるが、要するに [3] の方法を用いざるを得ないのは、非線形の度合いが強いため、もはや擬微分作用素の理論が適用出来ないからである。論文 [4] では、Sの近くで境界 $\partial\Omega$ をフラットにする変換を用いているが、このことは最近間違っていることが分かった。すなわち、この変換はもとの方程式の形をあまり変えないと書いてあるが、それは誤りである。しかし、方程式の形が複雑に変化しても計算が複雑になるだけで、方法と結論については変更はない。いずれ修正を発表する予定である。

以上、境界条件が S を境にしてDirichlet 型から Neumann 型へ不連続に変化する場合を考えたが、つぎに滑らかに変化する場合を考える。例えば、境界条件が

$$\alpha u + (1-\alpha)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad on\ \partial\Omega \tag{1.2}$$

の形に表される場合である。ここで α は $\partial\Omega$ 上の滑らかな $0 \le \alpha \le 1$ なる関数である。$\alpha = 1$ の場所では Dirichlet 条件、$\alpha = 0$ の場所では Neumann 条件、$0 < \alpha < 1$ の場所では第3種境界条件になっている。簡単のため、もとの混合境界条件を「不連続型」、(1.2) のような場合を「連続型」ということにしよう。従って「不連続型」では、 α は 0 または 1 の値しかとらない不連続関数である。

「連続型」の混合境界条件の場合、単独楕円型方程式を含む線形放物型方程式について、Terakado[10] の顕著な業績がある。これは、正則な解の存在と一意性、L^p-評価式、Schauder 評価式を含むものであり、終局的な結果といえるであろう。方法は退化した表象をもつ擬微分作用素の理論である。この問題に関しては、(1.2) を斜交境界条件にまで拡大したものなど、多くの人たちの結果があるが、ここでは、非線形方程式の段階への発展を意識しているために、その人達の諸結果の紹介は省略させて頂く。この場合でも、初等的な変分法での解の正則性の取り扱いが可能であるかとの疑問が生じる。それについては、例えば著者の1974年の結果 [2] を参照されたい。

最後に、線形楕円型方程式系に近い定常弾性体方程式について考察する。この方程

式の境界値問題については、Duvaut-Lions による有名な本 [1] がある。未知関数は、弾性体における各位置における 3 次元の変位である。このとき境界条件は Dirichlet-Neumann 型、すなわち D-N 型の混合型とするのが、物理的に最も自然である。[1] では、「不連続型」の場合も取り扱っているが、解の存在については、H^1に属する弱解についてである。S の近くでの解の正則性については議論されていない。ただし [1] では非定常の場合が取り扱われている。1990 年、Ito[6] は、弾性体方程式の「連続型」の混合境界値問題について結果を出した。[6] によれば、領域の形状、既知関数が十分滑らかならば、解も十分滑らかであるという結果である。方法は擬分作用素の理論である。

楕円型方程式の場合を振り返れば、弾性体方程式でも「不連続型」の場合はどうなのかという問題が生じる。昨年、著者と和田氏の共同研究 [5] で定常弾性体方程式の「不連続型」混合境界値問題の解の正則性を初等的な変分的方法で示した。すなわち、解の 2 階導関数が $L^p(\exists p > 1)$ に属することを示した。方法は、我々のいままでに用いた [3],[4] のそれである。では、弾性体方程式で「不連続型」の場合擬微分作用素の理論を展開した結果があるかといえば、それは Rempel-Schulze[8] である。著者は未だこの論文を理解出来ていないので、ここではこのような論文があるということに留める。この講究録では、同じ方法を用いた我々の結果 [3]、[4]、[5] を代表する意味で、[5] の結果の内容を手短に紹介することにする。

2 結果

Ω は R^3 内の有界領域でそれが弾性体である。$\partial\Omega$ は十分滑らかとする。$\partial_+\Omega, \partial_-\Omega, S$ などは、前節の初めにある定義で $n = 3$ の場合とする。位置の座標は $x = (x_1, x_2, x_3)$、$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ は弾性体内の各点の変位を表す。$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ をそれぞれ ストレス·テンソル、ストレイン·テンソル とすれば、$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}$ と書けて a_{ijkh}は次の条件をみたす:

1. (対称性) $a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij}$

2. (楕円性) 正定数 m が存在して

$$\sum_{i,j,k,h} a_{ijkh}s_{ij}s_{kh} \geq m\sum_{ij}(s_{ij})^2,\ \forall x \in \Omega, \forall(s_{ij}) \in R^9$$

ここで $a_{ijkh} \in C^1(\overline{\Omega})$ を仮定する。

作用素 A を次で定義する：

$$(A\mathbf{u})_i = -\sum_{j,k,h} \partial_{x_j}(a_{ijkh}\varepsilon_{kh}), \quad i = 1, 2, 3$$

更に次の境界作用素 B を定義する：

$$(B\mathbf{u})_i = \sum_{j,k,h} \nu_j(x) a_{ijkh}\varepsilon_{kh}, \quad i = 1, 2, 3$$

良く知られているように（例えば、[1]）、次をみたす $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3$ がただ一つ存在する：

$$(2.1) \qquad (A+\lambda)\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad in\, \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad on\, \partial_+\Omega, \quad B\mathbf{u} = \mathbf{h} \quad on\, \partial_-\Omega.$$

ただし、λ は十分大きな実数で、$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ は $\overline{\Omega}$ で十分滑らかなベクトル関数とし、$\mathbf{g}, \mathbf{h}$ は S の近くで $\mathbf{O}$ とする。

$P \in R^3$ について

$$K_P = \{Q \in \partial\Omega |\ d(P,Q) = d(P, \partial\Omega)\}$$

とおき, $\gamma > 0$ について Ω_γ を次で定義する：

$$\Omega_\gamma = \{P \in \Omega |\ d(P, \partial\Omega) > \gamma d(Q, S),\ \forall Q \in K_P\}$$

例えば $\Omega = \{(x_1, ..., x_n)|\ x_n > 0\}$, $S = \{x_{n-1} = x_n = 0\}$ の場合、$\Omega_\gamma = \{x_n > \gamma |x_{n-1}|\}$ である。

定理. $\mathbf{u}$ は (2.1) の解とする。そのとき、ある $\delta > 0$ について、次がなりたつ：

$$\partial^2 \mathbf{u} \in (L^{1+\delta}(\Omega_\gamma))^3, \quad \forall \gamma > 0$$

そして

$$\int_{\Omega_\gamma} |\partial^2 \mathbf{u}|^{1+\delta} dx = O(\gamma^{-1}) \quad (\gamma \to +0)$$

ただし、δ は (a_{ijkh}) のみに依存して、$\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ には依存しない。

3　準備

$\rho(P) = d(P, S)$ とおき、空間 $L^2(\Omega)$, $(L^2(\Omega))^3$ のノルムを単に $\|\ \ \|$ とかく。そして

$$C^1_{(0)}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega})|\ \overline{\partial_+\Omega} \text{ の近くで } u = 0\}$$

とおく。

実数 β と $\mathbf{u}$ について

$$|||\mathbf{u}|||_\beta = \| \rho^{-\beta/2}\nabla\mathbf{u} \| + \| \rho^{-\beta/2}\mathbf{u} \|$$

とおき、$C^1_{(0)}(\overline{\Omega})$ をこのノルムで完備化した空間を V_β で表す。$V = V_0$ とおく。直積空間 $(V_\beta)^3, V^3$ をそれぞれ $\mathbf{V}_\beta, \mathbf{V}$ で表す。

$\mathbf{g}, \mathbf{h}$ を $\overline{\Omega}$ に滑らかに拡張したベクトル関数を $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ で表す。$\mathbf{u}$ は (2.1) の解とすれば、次がなりたつ：
$\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ に依存しない正数 β_1, C が存在して、$0 < \beta < \beta_1$ のとき、$\mathbf{u} - \mathbf{G} \in \mathbf{V}_\beta$ であって

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{G}|||_\beta \le C(|||\mathbf{H}|||_\beta + \| \rho^{1-\beta/2}(\mathbf{f} - A\mathbf{G} - \lambda\mathbf{G} \|)$$

4　重み付き平行移動

上半空間 $\{x_3 > 0\}$ を R^3_+ で表し、そこで考える。$\partial_+ R^3_+ = \{(x_1, x_2, 0) | \ x_2 > 0\}, \partial_- R^3_+ = \{(x_1, x_2, 0) | \ x_2 < 0\}$ とする。α は $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ なる任意の固定された実数とする。あとになれば、十分 1 に近くとることにする。ここで $\alpha \ne 1$ であることが重要である。$\alpha = 1$ にしてしまえば、あとの議論は成立しない。$\tilde{\rho}(x) = (x_2^2 + x_3^{2\alpha})^{1/2}$ とおく。このとき

$$|\partial_{x_2}\tilde{\rho}| \le C, \qquad |\partial_{x_3}\tilde{\rho}| \le C\tilde{\rho}^{1-1/\alpha}$$

次の写像を定義する：

$$\Phi_\tau: \quad y_2 = x_2 + \tau\tilde{\rho}, \quad y_i = x_i \ (i \ne 2)$$

ただし、τ は十分小さな正数。今後、変数 x と 変数 y は関係式 $y = \Phi_\tau(x)$ で結ばれているものとする。

関数 u について、次のような作用素を定義する：

$$(S_\tau u)(x) = u(x_1, x_2 + \tau\tilde{\rho}, x_3), \ (T_\tau u)(y) = u(y_1, y_2 - \tau\tilde{\rho}, y_3), \ (R_\tau u)(x) = (T_\tau u)(y)|_{y=x}$$

さらに、次の差分商を定義する：

$$(P_\tau u)(x) = \tau^{-1}((S_\tau u)(x) - u(x)), \ (Q_\tau u)(y) = \tau^{-1}((T_\tau u)(y) - u(y))$$

上のような各作用素について、いくつかの性質を準備するのであるが、ここでは代表的な性質をあげておく。その前にいくつかの関数空間を定義する。

$$\rho=(x_2^2+x_3^2)^{1/2},\quad \partial_+R_+^3=\{(x_1,x_2,0);\ x_2>0\},$$

$$C_{(0)}^1(\overline{R_+^3})=\{u\in C^1(\overline{R_+^3});\ \mathrm{supp}\ u\ \text{はコンパクトで}\ \overline{\partial_+R_+^3}\ \text{の近くで}\ u=0\},$$

ノルム $\|\ \rho^{-\beta/2}\nabla u\ \|+\|\ \rho^{-\beta/2}u\ \|$ によって空間 $C_{(0)}^1(\overline{R_+^3})$ を完備化した空間を $V_\beta(R_+^3)$ で表す。ただし、$\|\quad\|$ は $L^2(R_+^3)$ のノルムを表す。そして $V(R_+^3)=V_0(R_+^3)$ とおく。

次がなりたつ：

1. $0<\beta<1$ で $\alpha=\frac{2}{\beta+2}$ とおけば、$u\in V_\beta(R_+^3)$ について

$$S_\tau u,\ T_\tau u,\ R_\tau u,\ S_\tau R_\tau u\in V(R_+^3)$$

2. $u\in V(R_+^3)$ について

$$\|\ \tilde{\rho}^{-1}P_\tau u\ \|_x\le C\ \|\ \partial_{x_2}u\ \|_x,\quad \|\ \tilde{\rho}^{-1}Q_\tau u\ \|_y\le C\ \|\ \partial_{y_2}u\ \|_y$$

ただし、C は $\tau,\ u$ に依存しない。

5　主要な評価式

P_0 は S 上の任意に固定された点で、U は P_0 の近傍とする。U から R^3 の中への次のような写像 $\Psi\ (x\to y)$ をとる：Ψ と Ψ^{-1} は C^2級で、

$$\Psi(P^0)=O,\quad \Psi(U\cap S)\subset\{y_2=y_3=0\},$$

$$\Psi(U\cap\Omega)\subset\{y_3>0\},\quad \Psi(U\cap\partial_+\Omega)\subset\{y_2>0,\ y_3=0\},$$

$$\Psi(U\cap\partial_-\Omega)\subset\{y_2<0,\ y_3=0\}$$

Ψ の $U\cap\Omega,\ U\cap\partial\Omega$ での Jacobien をそれぞれ $J,\ j$ で表す。次の２次形式を考える：

$$a_\lambda(\mathbf{u},\mathbf{v})=(a_{ijkh}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}),\varepsilon_{kh}(\mathbf{v}))+\lambda(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

写像 Ψ によってストレイン·テンソルは次のように書き直せる：

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\sum_p(b_{ip}\partial_{y_p}u_j+b_{jp}\partial_{y_p}u_i)$$

ただし $b_{ip} = \partial y_p / \partial x_i$。

$y' = (y_1, y_2)$, $\bar{\rho} = (y_2^2 + y_3^2)^{1/2}$ とおき、十分小さい $R > 0$ について

$$D = \{(y', y_3) |\, |y| < R,\ y_3 > 0\},\ \Gamma_+ = \{(y', 0) |\, |y'| < R,\ y_2 > 0\},$$

$$\Gamma_- = \{(y', 0) |\, |y'| < R,\ y_2 < 0\}$$

さらに $\gamma > 0$ について $D_\gamma = D \cap \{y_3 > \gamma |y_2|\}$ とおく。$\psi(U \cap \Omega) \supset D$ である。そして

$$|||u|||_{\beta,D} = \| \bar{\rho}^{-\beta/2} \nabla u \|_D + \| \bar{\rho}^{-\beta/2} u \|_D,$$

$$C^1_{(0)}(\bar{D}) = \{u \in C^1(\bar{D}) |\, \bar{\Gamma}\text{の近くで}\, u = 0\}$$

とおく。$V_{\beta,D}$ は $C^1_{(0)}(\bar{D})$ をノルム $|||\ \ |||$ で完備化した空間とする。混乱がないと思われるので、簡単のため、$|||\ \ |||_{\beta,D}$, $V_{\beta,D}$, $V_{0,D}$, $(V_{\beta,D})^3$, $(V_{0,D})^3$ を、それぞれ以前と同じ記号 $|||\ \ |||_\beta$, V_β, V, $\mathbf{V}_\beta$, $\mathbf{V}$ で表す。

今後、簡単のため新しい変数 $y = (y_1, y_2, y_3)$ をもとの変数 $x = (x_1, x_2, x_3)$ で書く。

ζ は原点の近傍で compact support をもち、原点のちかくで 1 に等しい非負の滑らかな関数とする。このとき次の形式

$$a_\lambda(\mathbf{u}, \zeta\mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \zeta \mathbf{v} d\sigma$$

は写像 Ψ によって次のように書き直せる：

$$I(\mathbf{u}, \zeta\mathbf{v}) \equiv (|J| a_{ijkh} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \varepsilon_{kh}(\zeta\mathbf{v})) - \int_{\Gamma_-} |j| \mathbf{h} \cdot \zeta \mathbf{v} dx_1 dx_2$$

$\|\ \ \|_2$ は H^2-ノルムを表すものとする。

以上のもとで次のことが分かる：

$0 < \beta < 1$ で $\alpha = \frac{2}{\beta+2}$ とする。このとき、任意の $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_\beta$ について

$$I(\mathbf{u}, \zeta P_\tau Q_\tau(\zeta\mathbf{u})) \geq c \left(\sum_{i,j} \| \zeta \varepsilon_{ij}(Q_\tau \mathbf{u}) \|_y^2 + \lambda \| \zeta Q_\tau \mathbf{u} \|_y^2 \right)$$

$$-C(\| \mathbf{H} \|_2^2 + \| \rho^{-\beta/2} \nabla \mathbf{u} \|^2 + (1+\lambda) \| \mathbf{u} \|^2)$$

ただし、c, C は τ, λ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$ に依存しない正定数。そして右辺最後のノルムは Ω 上のそれである。

6 定理の証明

$\mathbf{u}$ は(2.1)の解とし、$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}-\mathbf{G}$ とおく。 を(2.1)の解とする。ε を $2\varepsilon<\beta_1$ なる正数とし、$\beta=2\varepsilon, \alpha=\frac{2}{\beta+2}$ とし、この α を第4節の α にとる。第3節の結果より $\tilde{\mathbf{u}}\in\mathbf{V}_\beta$ が分かる。第5節の結果より

$$\sum_{i,j}\|\zeta\varepsilon_{ij}(Q_\tau\tilde{\mathbf{u}})\|_y^2+\lambda\|\zeta Q_\tau\tilde{\mathbf{u}}\|_y^2\leq C|(\mathbf{f}-A\mathbf{G}-\lambda\mathbf{G},|J|\zeta P_\tau Q_\tau(\zeta\tilde{\mathbf{u}}))_x|$$

$$+C(\|\mathbf{H}\|_2^2+\|\rho^{-\beta/2}\nabla\tilde{\mathbf{u}}\|^2+(1+\lambda)\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2)$$

右辺括弧内の各ノルムは Ω 上のそれであり、C は τ, λ, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ に依存しない定数である。

ここで Korn の不等式 $\|\zeta\nabla\mathbf{w}\|\leq C(\sum_{i,j}\|\zeta\varepsilon_{ij}(\mathbf{w})\|+\|\mathbf{w}\|)$ $(\mathbf{w}\in\mathbf{V})$ を用いて

$$\sum_{i,j}\|\zeta\varepsilon_{ij}(Q_\tau\tilde{\mathbf{u}})\|_y^2+\|\zeta Q_\tau\tilde{\mathbf{u}}\|_y^2$$

$$\leq C(\|\rho^{1-\beta/2}(\mathbf{f}-A\mathbf{G}-\lambda\mathbf{G}\|^2+\|G\|_2^2+\|\mathbf{H}\|_2^2)$$

がなりたつ。故に

$$\|Q_\tau(\zeta\tilde{\mathbf{u}})\|_1\leq C(\|\rho^{1-\beta/2}(\mathbf{f}-A\mathbf{G}-\lambda\mathbf{G})\|+\|\mathbf{G}\|_2^2+\|\mathbf{H}\|_2).$$

従って $\{Q_\tau(\zeta\tilde{\mathbf{u}})\}$ は $(H^1(D))^3$ で τ に関して一様有界。故に $\exists\{\tau_\nu\}$, $\exists\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\in(H^1(D))^3$; $\tau_\nu\to+0$ $(\nu\to\infty)$, $Q_{\tau_\nu}(\zeta\tilde{\mathbf{u}})\to\mathbf{v}$ weakly in $(H^1(D))^3$ $(\nu\to\infty)$, このことは

$$\partial_{x_i}v_j=-\partial_{x_i}(\tilde{\rho}\partial_{x_2}(\zeta\tilde{u_j}))\in L^2(\Omega)$$

を意味する。故に

$$\|\tilde{\rho}\partial_{x_i}\partial_{x_2}(\zeta\tilde{u_j})\|\leq C(\|\rho^{1-\beta/2}\mathbf{f}\|+\|\mathbf{G}\|_2+\|\mathbf{H}\|_2),\quad i=1,2,3$$

$\partial_{x_i}\partial_{x_2}$ を $\partial_{x_i}\partial_{x_1}$ に置き換えれば、より容易である。従って $(i,j)\neq(3,3)$ のとき

$$\|\tilde{\rho}\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\zeta\tilde{\mathbf{u}})\|\leq C(\|\rho^{1-\beta/2}\mathbf{f}\|+\|\mathbf{G}\|_2+\|\mathbf{H}\|_2)$$

もとの方程式 (2.1) から計算して、これは $(i,j)=(3,3)$ の場合にもなりたつことが分かる。

$1<t<\frac{2(\beta+2)}{\beta+4}$ とし、$p=\frac{2}{t}$, $q=\frac{2}{2-t}$ とおけば、Hölder の不等式より

$$\int_{D_\gamma}|\partial^2(\zeta\tilde{\mathbf{u}})|^t dx\leq\left(\int_{D_\gamma}\tilde{\rho}^{-tq}dx\right)^{1/q}\left(\int_{D_\gamma}|\tilde{\rho}\partial^2(\zeta\tilde{\mathbf{u}})|^2dx\right)^{1/p}$$

D_γ 上で $\rho^\alpha \le C(1+\gamma^{-2})^{\alpha/2}\tilde{\rho}$ であるから

$$\int_{D_\gamma} \tilde{\rho}^{-tq} dx \le C(1+\gamma^{-2})^{\alpha tq/2} \int_0^R \rho^{1-\alpha tq} d\rho$$

$1-\alpha tq > -1$ であるから、右辺の積分は有限である。故に

$$\int_{D_\gamma} |\partial^2(\zeta\tilde{\mathbf{u}})|^t dx \le C(1+\gamma^{-2})^{\alpha t/2} \left(\int_{D_\gamma} |\tilde{\rho}\partial^2(\zeta\tilde{\mathbf{u}})|^2 dx\right)^{1/p}$$

ここで上の評価式と $\alpha t < 1$ に注意すれば

$$\int_{\Omega_\gamma} |\partial^2(\zeta\tilde{\mathbf{u}})|^t dx = O(\gamma^{-1}) \quad (\gamma \to +0)$$

故に定理が示された。

7　今後の課題

次のように今後の課題をあげておく。

1. 我々が [5] で取り扱った弾性体方程式の Dirichlet-Neumann 型混合境界値問題で、S 上のある点 P で

$$a_{ijkh} = \begin{cases} 1, & ((i,j) = (k,h)) \\ 0 & ((i,j) \ne (k,h)) \end{cases}$$

と仮定した場合、そこでの臨界値はどのような値になるか? すなわち、P の近傍で $\partial^2\mathbf{u} \in (L^p)^3$ となる p の上限の値は?

2. 我々が [4] で取り扱った $p-$ラプラス 方程式 $(p > 2)$ の Dirichlet-Neumann 型混合境界値問題での議論が、平均曲率方程式についても有効であるか?なお、平均曲率方程式の「不連続型」D-N 型混合境界値問題は、かつて E.Guisti, R.Temann などによって題材になった。

3. 我々は [3]、[4]、[5] で「不連続型」しか取り扱わなかったが、それぞれにおいて「連続型」の場合は如何?

4. 定常 Navier-Stokes 方程式（線形でよい）の Dirichlet-Neumann 型混合境界値問

題の「不連続型」の場合、解 $\mathbf{u}$ の２階導関数 は S の近くでどのような空間に属するか？ この問題の困難性は、$\mathbf{u}$ に重みを付けた平行移動を作用させたとき、それはもはや $div\,\mathbf{u} = 0$ をみたさないことである。

5. ダムの問題を、モデルとする非線形退化拡散変分不等式の初期値境界値問題では、境界条件は次の三つが混在している「不連続型」である：Dirichlet 型、Neumann 型、Signorini 型 (U.Hornung, Manuscripta Math., 39(1982) 参照)。 これら三つの部分の境目における解の正則性について如何？

References

[1] G.Duvaut and J.L.Lions, Inequalities in Mathematics and Physics. Springer, 1976.

[2] K.Hayasida, On the singular boundary value problem for elliptic equations. Trans. Amer. Math. Soc., 184(1973), 205-221.

[3] K.Hayasida and H.Nagase, On systems of variational inequalities mixed boundary conditions. Funkcialj Ekvacioj, 28(1985), 121-138.

[4] K.Hayasida and Y.Kawi, On a degenerate quasilinear elliptic equation with mixed boundary conditions. Tokyo J. Math., 10(1987), 437-470.

[5] K.Hayasida and K.Wada, On the regularity property for solutions of the equation of linear elastostatics with discontinuous boundary condition. Japan J. Indust. Appl. Math., 16(1999), 377-399.

[6] H.Ito, On certain mixed-type boundary-value problelms of elastostatics. Tsukuba J. Math., 14(1990), 133-153.

[7] M.K.V.Murthy and G.Stampacchia, A variational inequality with mixed boundary conditions. Israel J. Math., 13(1972), 188-224.

[8] S.Rempel and B.W.Schulze, Mixed boundary value problems for Lamé's system in three dimensions. Math. Nachr. 119(1984), 265-290.

[9] E.Shamir, Regularization of mixed second order elliptic problems. Israel J. Math., 6(1968), 150-168.

[10] M.Terakado, On singular initial-boundary value problems for second order parabolic equations. J. Math. Kyoto Univ., 25(1985), 145-168.

E-mail: hayasida@kappa.s.kanazawa-u.ac.jp